1. Линейная алгебра

1.1. Действия с матрицами.

Выполнить действия:

а) $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) по правилу умножения матрицы на число и сложения матриц получаем

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2(-5) & 5-2(0) \\ 1-2(2) & 6-2(1) \\ -5-2(-2) & 1-2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$$

б) используем правило умножения матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+1\cdot 2+5\cdot 1 & 1\cdot 0+1\cdot 5+5\cdot(-3) \\ 1\cdot 1+10\cdot 2+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 0+10\cdot 5+(-1)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 20 & 53 \end{pmatrix}.$$

1.2. Вычисление определителей.

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ двумя способами:

а) по правилу «треугольников»; б) разложением по строке.

Решение.

а) по правилу «треугольников»

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-4) + (-1)\cdot 2\cdot 1 + 5\cdot 6\cdot(-5) - 1\cdot 0\cdot(-5) - 1\cdot 2\cdot 6 - (-1)\cdot 5\cdot(-4) =$$

$$= 0 - 2 - 150 - 0 - 12 - 20 = -184$$

б) разложением по строке

так как во второй строке есть ноль, то целесообразно разложить именно по второй строке

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -22-162 = -184$$

1.3. Системы линейных уравнений.

Решить систему уравнений тремя способами: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса; в) с помощью вычисления обратной матрицы, записав систему в матричном виде $A \cdot X = B$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 30 \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение.

а)) по формулам Крамера;

Найдем основной определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 50+1-72-30+8-15 = -58$$

Определитель не равен нулю, значит, система совместима

Находим определители, составленные путем замены столбика коэффициентов соответствующей переменной свободным столбиком

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 30 & 5 & -4 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 275+30-72-30+44-450 = -203$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & 30 & -4 \\ 6 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 300+6-264-180+48-55 = -145$$

$$\Delta_{x3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 1 & 5 & 30 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 60+11+540-330-60+18 = 203$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{203}{58} = 3.5, \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{145}{58} = 2.5, \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = -\frac{203}{58} = -3.5$$

б) методом Гаусса;

Выписываем расширенную матрицу системы и преобразовываем ее к треугольному виду (прямой ход)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ \ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 \\ \ \\ 1 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 9 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ -49 \\ 27 \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} \ \\ 8 \\ 7 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 58 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ -49 \\ -203 \end{pmatrix}$$

Все диагональные элементы матрицы не нулевые, т.е., ранг матрицы равен ее порядку 3, и, значит, система совместима

Обратный ход: начиная с третьей строки, последовательно находим

$$x_3 = -\frac{203}{58} = -3.5$$
$$x_2 = \frac{49 - 9 \cdot 3.5}{7} = \frac{17.5}{7} = 2.5$$
$$x_1 = \frac{11 + 3.5 - 3 \cdot 2.5}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

в) с помощью обратной матрицы.

Запишем систему в матричном виде

$$AX = B$$

Тогда решение запишется

$$X = A^{-1}B$$

Найдем обратную матрицу. Для этого вычисляем дополнительные миноры, при этом их знак равен $(-1)^{i+j}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 29 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -29 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -29$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -14 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -17 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

Тогда обратная матрица примет вид

$$A^{-1} = -\frac{1}{58}\begin{pmatrix} 29 & -14 & -17 \\ -29 & 4 & 9 \\ -29 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

В результате

$$X=-\frac{1}{58}\begin{pmatrix}29 & -14 & -17\\ -29 & 4 & 9\\ -29 & 16 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 30\\ 6\end{pmatrix}=-\frac{1}{58}\begin{pmatrix}319-420-102\\ -319+120+54\\ -319+480+42\end{pmatrix}=-\frac{1}{58}\begin{pmatrix}-203\\ -145\\ 203\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\ 2.5\\ -3.5\end{pmatrix}$$

Все три метода дали одинаковый результат.

2. Аналитическая геометрия

2.1 Прямая на плоскости.

Построить треугольник, вершины которого находятся в точках $A(2;6)$, $B(1;-5)$, $C(-1;5)$ и найти:

1) координаты точки пересечения медиан;
2) длину и уравнение высоты, опущенной из вершины А;
3) площадь треугольника;
4) систему неравенств, задающих внутренность треугольника ABC.

Решение.

Построим чертеж

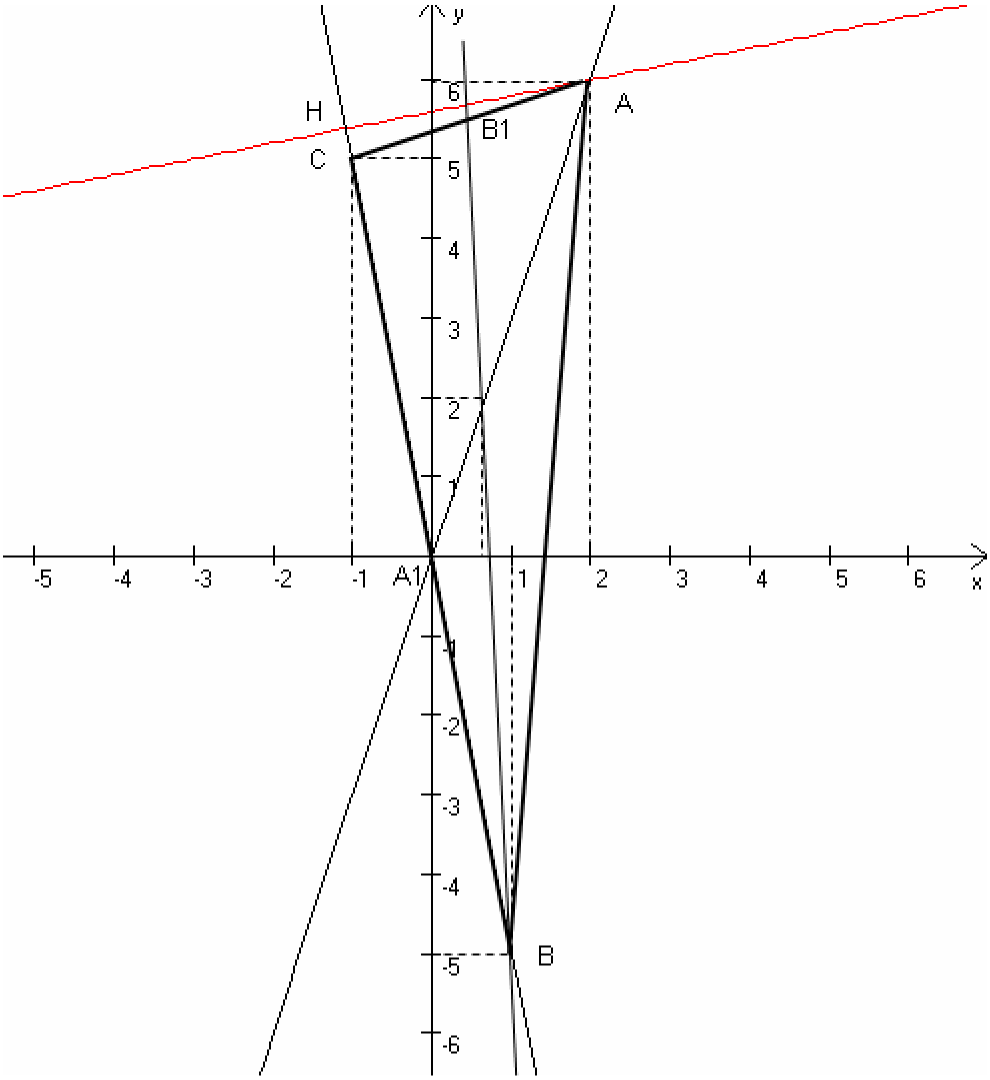

Рис 1.

1) координаты точки пересечения медиан;
Медианы по определению делят стороны пополам. Следовательно, найдем середины сторон.

$$x_{A1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1-1}{2} = 0, \qquad y_{A1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-5+5}{2} = 0$$

$$x_{B1} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad y_{B1} = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{6+5}{2} = \frac{11}{2}$$

Теперь запишем уравнения медиан и решим полученную систему.

$$AA_1 : \frac{x - x_A}{x_{A1} - x_A} = \frac{y - y_A}{y_{A1} - y_A} \Rightarrow \frac{x-2}{0-2} = \frac{y-6}{0-6} \Rightarrow 6(x-2) = 2(y-6)$$

$$6x - 2y = 0 \Rightarrow 3x - y = 0$$

$$BB_1 : \frac{x - x_B}{x_{B1} - x_B} = \frac{y - y_B}{y_{B1} - y_B} \Rightarrow \frac{x-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{y+5}{\frac{11}{2}+5} \Rightarrow 21(x-1) = -(y+5)$$

$$21x + y - 16 = 0$$

Находим точку пересечения медиан

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 21x + y - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 24x = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

2) длину и уравнение высоты, опущенной из вершины А;
Высота по определению перпендикулярна к стороне. По этому запишем уравнение стороны ВС

$$BC: \frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Rightarrow \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y+5}{5+5} \Rightarrow 10(x-1) = -2(y+5)$$
$$10x + 2y = 0 \Rightarrow 5x + y = 0$$

Тогда уравнение высоты можно записать как уравнение прямой, проходящей через точку А в указанном направлении. Направление задается нормальным вектором прямой ВС, т.е.

$$BC: 5x + y = 0 \Rightarrow \vec{n} = (5,1)$$

$$AH: \frac{x - x_A}{n_x} = \frac{y - y_A}{n_y} \Rightarrow \frac{x-2}{5} = \frac{y-6}{1} \Rightarrow x - 2 = 5y - 30 \Rightarrow x - 5y + 28 = 0$$

Длину высоты определим как расстояние от точки А до прямой ВС

$$|AH| = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 0|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{16}{\sqrt{26}}$$

3) площадь треугольника;
вычислим длину стороны ВС

$$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (5+5)^2} = \sqrt{104}$$

Тогда площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}|BC||AH| = \frac{1}{2}\sqrt{104}\,\frac{16}{\sqrt{26}} = \frac{16\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = 16$$

4) запишем систему неравенств, задающих внутренность треугольника АВС.
Для этого сначала запишем уравнения сторон

$$AB: \frac{x-x_B}{x_A-x_B}=\frac{y-y_B}{y_A-y_B}\Rightarrow\frac{x-1}{2-1}=\frac{y+5}{6+5}\Rightarrow 11(x-1)=(y+5)$$

$$11x-y-16=0$$

$$BC: \frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B}\Rightarrow\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y+5}{5+5}\Rightarrow 10(x-1)=-2(y+5)$$

$$10x+2y=0\Rightarrow 5x+y=0$$

$$AC: \frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}\Rightarrow\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-6}{5-6}\Rightarrow -x+2=-3(y-6)$$

$$x-3y+16=0$$

Тогда получаем систему неравенств, задающих внутренность треугольника ABC

$$\begin{cases}11x-y-16\le 0\\ 5x+y\ge 0\\ x-3y+16\ge 0\end{cases}$$

2.2 Прямая и плоскость в пространстве.

Дана треугольная пирамида с вершинами в точках $S(1;5;6)$, $A(2;-5;-1)$, $B(-5;2;-5)$, $C(-5;-1;-6)$,. Найти:

а) уравнение плоскости, проходящей через точки A, B и C;

б) величину угла между ребром SC и гранью ABC;

в) площадь грани ABC;

г) уравнение высоты, опущенной из вершины S на грань ABC, и ее длину;

д)объем пирамиды SABC.

Решение.

а) уравнение плоскости, проходящей через точки A, B и C

$$ABC: \quad \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z+1 \\ -5-2 & 2+5 & -5+1 \\ -5-2 & -1+5 & -6+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z+1 \\ -7 & 7 & -4 \\ -7 & 4 & -5 \end{vmatrix}=$$

$$= -35(x-2)+28(y+5)-28(z+1)+16(x-2)-35(y+5)+49(z+1)=$$

$$=-19(x-2)-7(y+5)+21(z+1)=-19x-7y+21z+24=0$$

б) величину угла между ребром SC и гранью ABC;

Синус угла между прямой и плоскостью найдем по формуле

$$\sin\alpha = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

где

(l, m, n) направляющий вектор прямой SC

(A, B, C) нормальный вектор плоскости ABC

Запишем уравнение прямой SC, как прямой, проходящей через две точки

$$SC: \quad \frac{x - x_S}{x_C - x_S} = \frac{y - y_S}{y_C - y_S} = \frac{z - z_S}{y_C - y_S}$$

$$\frac{x-1}{-5-1} = \frac{y-5}{-1-5} = \frac{z-6}{-6-6} \Rightarrow \frac{x-1}{6} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-6}{12}$$

Тогда

$$(l, m, n) = (6;6;12)$$

А из уравнения плоскости ABC

$$(A, B, C) = (-19;-7;21)$$

Вычисляем угол

$$\sin\alpha = \frac{|(-19)\cdot 6 + (-7)\cdot 6 + 21\cdot 12|}{\sqrt{19^2 + 7^2 + 21^2}\sqrt{6^2 + 6^2 + 12^2}} = \frac{96}{\sqrt{851}\sqrt{216}} \approx 0.224$$

Отсюда

$$\alpha = \arcsin 0.224 \approx 13^0$$

в) площадь грани ABC;

площадь грани ABC найдем как половину площади параллелограмма, построенного на векторах AB и AC, т.е., как половина модуля векторного произведения этих векторов

Координаты векторов

$$\vec{AB} = (2+5,\ -5-2, -1+5) = (7,\ -7, 4)$$

$$\vec{AC} = (2+5,\ -5+1,\ -1+6) = (7,\ -4, 5)$$

Находим векторное произведение

$$\vec{AB}\, x\, \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & -7 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -35i + 28j - 28k + 49k + 16i - 35j = -19i - 7j + 21k$$

Тогда искомая площадь

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{AB}\,x\,\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{19^2+7^2+21^2}=\frac{1}{2}\sqrt{851}\ (\mathring{a}\ddot{a}.\hat{e}\hat{a}.)$$

г) уравнение высоты, опущенной из вершины S на грань ABC, и ее длину;

Уравнения высоты, опущенной из вершины S на грань ABC , запишем как уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении. Так как высота перпендикулярна плоскости ABC по определению, то за направляющий вектор прямой можно взять нормальный вектор плоскости.

Из вида уравнения плоскости

$$-19x-7y+21z+24=0$$

получаем нормальный вектор

$$\vec{n}=(-19,-7,21)$$

Тогда искомое уравнение высоты можно записать в виде

$$SD:\quad \frac{x-x_S}{n_x}=\frac{y-y_S}{n_y}=\frac{z-z_S}{n_z}$$

$$\frac{x-1}{-19}=\frac{y-5}{-7}=\frac{z-6}{21}$$

Длину высоты вычислим как расстояние от точки до плоскости

$$|SD|=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-19\cdot1-7\cdot5+21\cdot6+24|}{\sqrt{19^2+7^2+21^2}}=\frac{96}{\sqrt{851}}$$

д)объем пирамиды SABC.

Объем пирамиды найдем как шестую часть произведения векторов, на которых она построена.

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{A_1A_2}\cdot\vec{A_1A_3}\cdot\vec{A_1A_4}\right|$$

Из б)

$$\vec{AB}=(7,\,-7,4)$$

$$\vec{AC}=(3,\,-4,5)$$

Найдем координаты вектора $\vec{CB}$

$$\vec{AS}=(1-2,5+5,6+1)=(-1,\,10,7)$$

Вычислим произведение

$$\vec{AS}\;\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot=\begin{vmatrix}-1 & 10 & 7\\ 7 & -7 & 4\\ 7 & -4 & 5\end{vmatrix}=|\,35+280-196+343-16-350\,|=96$$

Следовательно

$$V=\frac{1}{6}\cdot 96=16\ (\mathit{åä.êóá})$$