# 3. Дифференциальное исчисление

**3.1. Пределы.**

3.1.1. Найти пределы функций:

.а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{x^2-5x+1})$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-26x+5}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+5}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+5}\right)^{6x}$.

*Решение.*

а) Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Умножим и разделим на выражение, дополняющее до разности квадратов

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{x^2-5x+1})=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{x^2-5x+1})(\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-5x+1})}{(\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-5x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x+5-x^2+5x-1}{(\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-5x+1})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x+4}{(\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-5x+1})}$$

Получили неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Выносим старшую степень за скобки и проводим сокращение

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x+4}{(\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-5x+1})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(6+\frac{4}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}})}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(6+\frac{4}{x})}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}})}=\frac{6}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=3$$

б) Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное к знаменателю выражение, а в числителе выделим множитель, образующий неопределенность

$$\begin{array}{l|l}
5x^2-26x+5 & x-5 \\ \cline{2-2}
\underline{5x^2-25x} & 5x-1 \\
\quad -x+5 & \\
\quad \underline{-x+5} &
\end{array}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{5x^2-26\,x+5}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+5}}=\lim_{x\to 5}\frac{(5x-1)(x-5)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+5})}{(\sqrt{2x}-\sqrt{x+5})(\sqrt{2x}+\sqrt{x+5})}=$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5x-1)(x-5)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+5})}{(2x-x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{(5x-1)(x-5)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+5})}{(x-5)}=;$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5x-1)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+5})}{1}=(25-1)(\sqrt{10}+\sqrt{10})=48\sqrt{10}$$

в) Преобразуем выражение к виду, позволяющему применить второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5-10}{x+5}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-10}{x+5}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-10}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{-10}}\right)^{\frac{-60x}{x+5}}=$$
$$=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{60x}{x+5}}=e^{-60}=\frac{1}{e^{60}}$$

**3.3. Приложения производной.**

3.3.1. С помощью методов дифференциального исчисления построить графики функций:

а) $y=\dfrac{x^2-5x+1}{x-5}$; б) $y=\dfrac{5x-1}{x^2-5^2}$

*Решение.*

а) $y=\dfrac{x^2-5x+1}{x-5}$

1. Область определения функции.

Функция определена для всех действительных значений аргумента, кроме точек, в которых знаменатель обращается в ноль

$$x-5=0\Rightarrow x=5$$

$$x\in(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$$

2. Четность функции.

Проверим условия четности

$$y(-x)=\frac{x^2+5x+1}{-x-5}$$
$$y(-x)\neq -y(x)$$
$$y(-x)\neq y(x)$$

следовательно, функция ни четная ни нечетная.

3. Исследуем функцию на экстремум.

Находим критические точки

$$y'(x)=\left(\frac{x^2-5x+1}{x-5}\right)'=\frac{(2x-5)(x-5)-(x^2-5x+1)}{(x-5)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-15x+25-x^2+5x-1}{(x-5)^2}=\frac{x^2-10x+24}{(x-5)^2}=\frac{(x-4)(x-6)}{(x-5)^2}=0$$

$$x_1=4, \quad x_2=6$$

Очевидно, что производная в области определения о существует везде. Следовательно, есть две критические точки. Вычислим значения функции в этих точках

$$y(4)=\frac{16-20+1}{4-5}=3$$

$$y(6)=\frac{36-30+1}{6-5}=7$$

Составим таблицу

| | $(-\infty;4)$ | 4 | (4;5) | 5 | (5,6) | 6 | $(6;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y’ | + | 0 | - | | - | 0 | + |
| y | возрастает | 3 | убывает | | убывает | 7 | возрастает |
| | | макс | | | | мин | |

4. Выпуклость функции.

Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю

$$y''(x)=\left(\frac{x^2-10x+24}{(x-5)^2}\right)'=\frac{(2x-10)(x-5)^2-2(x^2-10x+24)(x-5)}{(x-5)^4}=$$

$$=\frac{(2x-10)(x-5)-2(x^2-10x+24)}{(x-5)^3}=\frac{2x^2-20x+50-2x^2+20x-48}{(x-5)^3}=$$

$$=\frac{2}{(x-5)^3}\neq 0$$

Вторая производная существует всюду и не может быть равной нулю, следовательно, точек возможного перегиба нет

Составим таблицу

| | $(-\infty;5)$ | 5 | $(5;+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| y’’ | - | 0 | + |
| y | выпукла | Не сущ. | вогнута |
| | | | |

5. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{0-0+1}{0-5}=-\frac{1}{5}$$

$$y=0 \Rightarrow x^2-5x+1=0 \Rightarrow x_{1/2}=\frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2}=\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Построим интервалы знакопостоянства

| | $\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$ | $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}; \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$ | $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}; 5\right)$ | $(5;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| y | - | + | - | + |

6. Асимптоты графика.

Так как функция не определена в точках x=5, то эта точка есть точка разрыва. Найдем разносторонние пределы в окрестности этой точки

$$\lim_{x \to 5-0} y = \lim_{x \to -5-0} \frac{x^2-5x+1}{x-5} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 5+0} y = \lim_{x \to 5+0} \frac{x^2-5x+1}{x-5} = +\infty$$

Предел бесконечен, значит, в точках x=5 функция терпит разрыв второго рода.

Найдем

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-5x+1}{x-5} = \pm\infty$$

Наклонная асимптота имеет вид y = kx + b, где

$$k=\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2-5x+1}{x-5}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-5x+1}{x^2-5x} = 1$$

$$b=\lim_{x \to \infty}(f(x)-kx) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2-5x+1}{x-5}-x\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2-5x+1-x^2+5x}{x-5}\right) \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x-5}\right) = 0$$

Следовательно, прямая y=x наклонная асимптота графика функции.

7. По результатам исследования строим график функции: (Рис.1.)

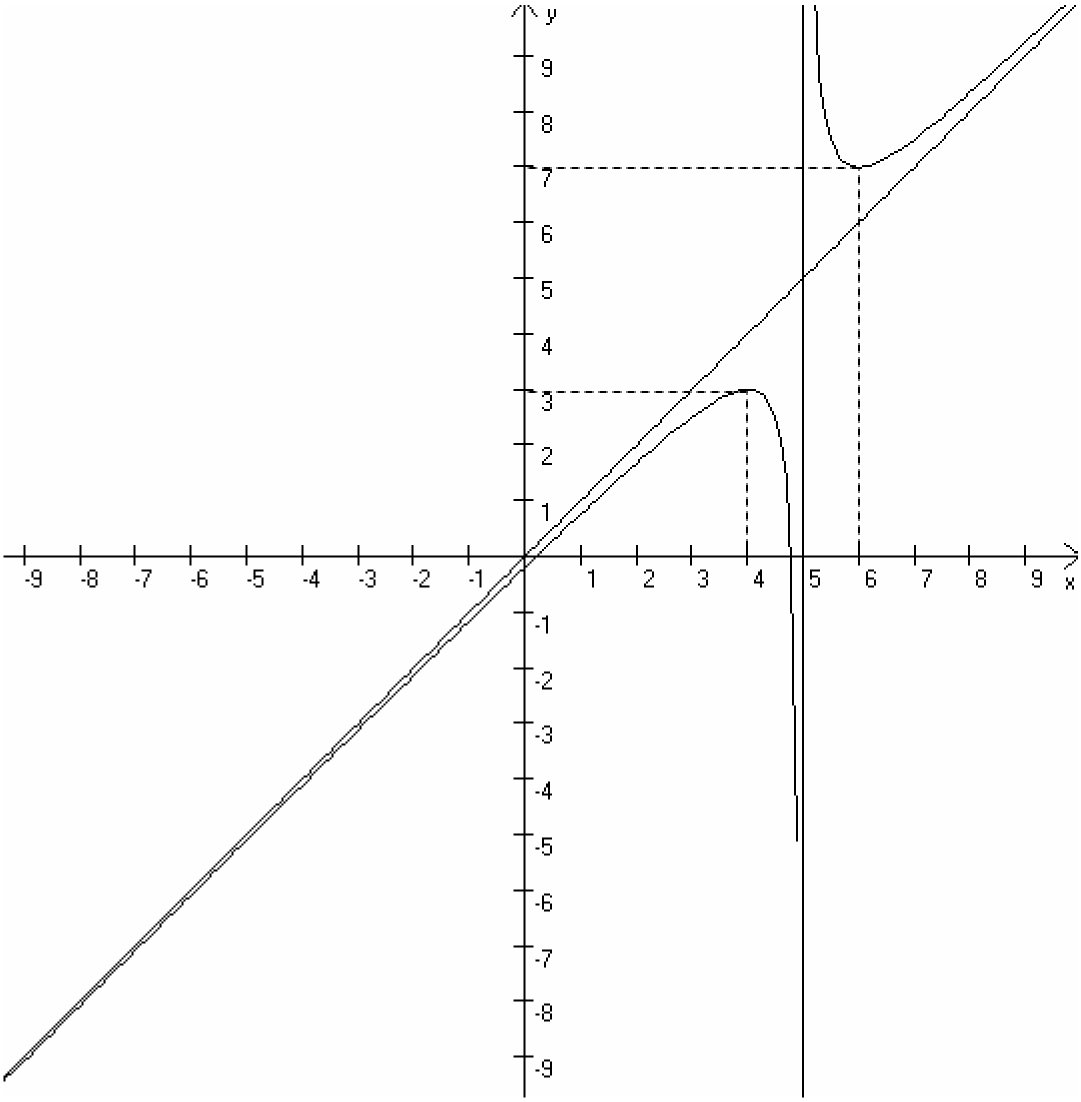

Рис 2.

б) $y = \dfrac{5x-1}{x^2-5^2}$

1. Область определения функции.

Функция определена для всех действительных значений аргумента, кроме точек, в которых знаменатель обращается в ноль

$$(x-5)(x+5)=0 \Rightarrow x_1=-5, x_2=5,$$

$$x \in (-\infty;-5) \cup (-5;5) \cup (5;+\infty)$$

2. Четность функции.

Проверим условия четности

$$y(-x)=\frac{-5x-1}{x^2-5^2}$$
$$y(-x)\neq -y(x)$$
$$y(-x)\neq y(x)$$

следовательно, функция ни четная ни нечетная.

3. Исследуем функцию на экстремум.

Находим критические точки

$$y'(x)=\left(\frac{5x-1}{x^2-5^2}\right)'=\frac{5(x^2-5^2)-2x(5x-1)}{(x^2-5^2)^2}=$$
$$=\frac{5x^2-125-10x^2+2x}{(x^2-5^2)^2}=-\frac{5x^2-2x+125}{(x^2-5^2)^2}=0$$
$$D=4-3000<0$$

Очевидно, что производная в области определения о существует везде. Следовательно, критических[ точек нет.
Составим таблицу

| | $(-\infty;-5)$ | -5 | (-5;5) | 5 | $(5;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y’ | - | | - | | - |
| y | убывает | | убывает | | убывает |
| | | | | | |

4. Выпуклость функции.

Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю

$$y''(x)=\left(-\frac{5x^2-2x+125}{(x^2-5^2)^2}\right)'=-\frac{(10x-2)(x^2-25)^2-4x(5x^2-2x+125)(x^2-25)}{(x-5)^4}=$$
$$=-\frac{(10x-2)(x^2-25)-4x(5x^2-2x+125)}{(x-5)^3}=2\frac{5x^3-3x^2+375x-25}{(x-5)^3}=0$$

Вторая производная существует всюду . Путем подбора параметра получаем x=0,07
Составим таблицу

| | $(-\infty;-5)$ | -5 | (-5;0,07) | 0,07 | (0,07;5) | 5 | $(5;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y’’ | - | | | 0 | | | + |
| y | выпукла | | вогнута | | выпукла | | вогнута |
| | | | | перегиб | | | |

5. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0-1}{0-5^2} = \frac{1}{25}$$
$$y = 0 \Rightarrow \frac{5x-1}{x^2-5^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

Построим интервалы знакопостоянства

| | $(-\infty;-5)$ | $\left(-5;\frac{1}{5}\right)$ | $\left(\frac{1}{5};5\right)$ | $(5;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| y | - | + | - | + |

6. Асимптоты графика.

Так как функция не определена в точках x=-5 x=5, то эти точки есть точками разрыва. Найдем разносторонние пределы в окрестности этой точки

$$\lim_{x\to -5-0} y = \lim_{x\to --5-0} \frac{5x-1}{x^2-5^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -5+0} y = \lim_{x\to -5+0} \frac{5x-1}{x^2-5^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to -5-0} \frac{5x-1}{x^2-5^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 5+0} y = \lim_{x\to 5+0} \frac{5x-1}{x^2-5^2} = +\infty$$

Пределы бесконечны, значит, в точках x=5 и x=-5 функция терпит разрыв второго рода. А прямые x=5 и x=-5 есть вертикальными асимптотами.
Найдем

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x-1}{x^2-5^2} = 0$$

Это значит, что прямая y=0 есть горизонтальная асимптота графика

Наклонная асимптота имеет вид y = kx + b, где

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x-1}{x^2-5^2}}{x} = 0$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (\frac{5x-1}{x^2-5^2}) = 0$$

Следовательно, наклонная асимптота графика функции совпала с горизонтальной.

7. По результатам исследования строим график функции: (Рис.2.)

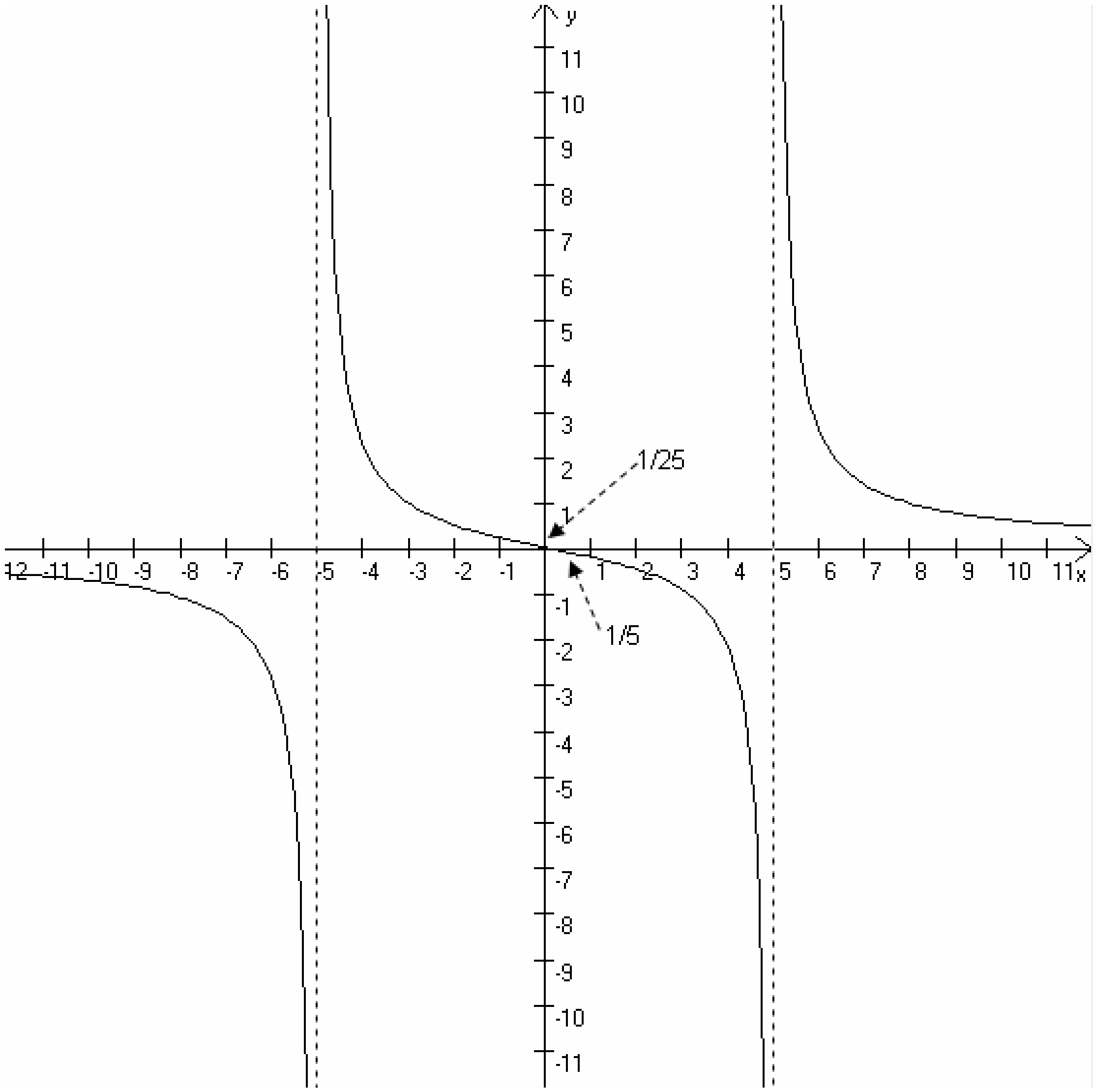


Рис 3.

# 4. Интегральное исчисление

4.2. **Применения определенных интегралов.**
4.2.1. Построить схематический чертеж и найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = x^2 + x - 25, \quad 30x - 6y - 120 = 0$;

*Решение.*

Первое уравнение определяет параболу, направленную вверх, второе уравнение – это прямая линия.
Найдем точки пересечения линий, они же будут пределами интегрирования.

$$\begin{cases} y - x^2 - x + 25 = 0 \\ 30x - 6y - 120 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 20 - x^2 - x + 25 = 0 \\ y = 5x - 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0 \\ y = 5x - 20 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 - 6}{2} = -1$$

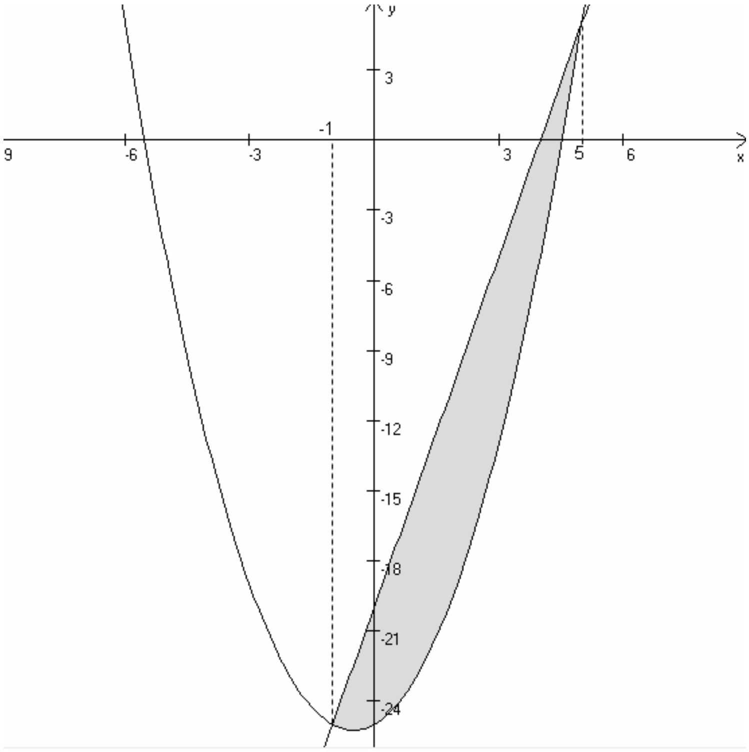


Рис 4

Тогда

$$S = \int_{-1}^{5} (5x - 20 - x^2 - x + 25)dx = \int_{-1}^{5} (4x - x^2 + 5)dx = (2x^2 - \frac{x^3}{3} + 5x)\Big|_{-1}^{5} =$$

$$= (2 \cdot 5^2 - \frac{5^3}{3} + 5 \cdot 5) - (2 \cdot 1^2 + \frac{1^3}{3} - 5 \cdot 1) = 75 - -\frac{125}{3} + 3 - \frac{1}{3} = 36 \ (åä.êâ)$$