1. $xy' = y + xtg\frac{y}{x}$

Разделили левую и правую часть уравнения на *x*. Тогда уравнение запишется в виде

$$y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$$

Делаем замену

$$p = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = p + xp'$$

Подставим эти выражения в уравнение

$$y' - \frac{y}{x} = tg\frac{y}{x} \Rightarrow p + xp' - p = tgp \Rightarrow xp' = tgp$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные

$$\frac{dp}{tgp} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем

$$\int\frac{dp}{tgp} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{\cos p dp}{\sin p} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{d\sin p}{\sin p} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(\sin p) = \ln Cx \Rightarrow \sin p = Cx \Rightarrow p = \arcsin(Cx)$$

Возвращаясь к замене, получаем искомое решение

$$p = \arcsin(Cx) \Rightarrow \frac{y}{x} = \arcsin(Cx) \Rightarrow y = x\arcsin(Cx)$$

2. $y' - y\cos x = \sin 2x$

Это линейное уравнение первого порядка. Следовательно, решение ищем в виде произведения двух функций

$$y = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

Подставим эти выражения в уравнение

$$u'v + uv' - uv\cos x = \sin 2x \Rightarrow u'v + u(v' - v\cos x) = \sin 2x$$

Для определения функции $v(x)$ можно взять

$$(v' - v\cos x) = 0$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Находим

$$\frac{dv}{v} = \cos x dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \cos x dx \Rightarrow \ln v = \sin x \Rightarrow v = e^{\sin x}$$

Подставим найденное значение в уравнение, учитывая, что $(v' - v\cos x) = 0$. Получим

$$u'v + u(v' - v\cos x) = \sin 2x \Rightarrow u'e^{\sin x} = \sin 2x$$

Аналогично находим

$$u'e^{\sin x} = \sin 2x \Rightarrow du = \frac{\sin 2x}{e^{\sin x}} dx \Rightarrow \int du = \int \frac{\sin 2x}{e^{\sin x}} dx \Rightarrow u = 2\int \frac{\sin x \cos x}{e^{\sin x}} dx$$

Вычислим интеграл справа отдельно, делая замену и применяя метод интегрирования по частям

$$\int \frac{\sin x \cos x}{e^{\sin x}} dx = \int \frac{\sin x}{e^{\sin x}} d\sin x = | p = \sin x | = \int \frac{p}{e^p} dp = \begin{vmatrix} p = u & du = dp \\ e^{-p} dp = dv & v = -e^{-p} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{p}{e^p} + \int e^{-p} dp = -\frac{p}{e^p} - \frac{1}{e^p} + C = -\frac{p+1}{e^p} + C = | p = \sin x | = -\frac{\sin x + 1}{e^{\sin x}} + C$$

Т.о.,

$$u = 2\int \frac{\sin x \cos x}{e^{\sin x}} dx \Rightarrow u = C - 2\frac{\sin x + 1}{e^{\sin x}}$$

В результате искомое решение примет вид

$$y = u(x)v(x) \Rightarrow y = e^{\sin x}(C - 2\frac{\sin x + 1}{e^{\sin x}})$$

Или

$$y = Ce^{\sin x} - 2(\sin x + 1)$$

3. $y'' - \frac{y'}{x} = xe^x$

Это уравнение, допускающее понижение порядка.
Делаем замену

$$y' = p \Rightarrow y'' = p'$$

Тогда получим линейное уравнение первого порядка

$$p' - \frac{1}{x} p = xe^x$$

Следовательно, решение ищем в виде произведения двух функций

$$y = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

Подставим эти выражения в уравнение

$$u'v + uv' - \frac{1}{x} uv = xe^x \Rightarrow u'v + u(v' - \frac{1}{x} v) = xe^x$$

Для определения функции $v(x)$ можно взять

$$(v' - \frac{1}{x} v) = 0$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Находим

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = \ln x \Rightarrow v = x$$

Подставим найденное значение в уравнение, учитывая, что $(v' - \frac{1}{x} v) = 0$. Получим

$$u'v + u(v' - \frac{1}{x} v) = xe^x \Rightarrow u'x = xe^x \Rightarrow u' = e^x$$

Аналогично находим

$$u' = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow \int du = \int e^x dx \Rightarrow u = e^x + C_1$$

Т.о.,

$$p = x(e^x + C_1)$$

Возвращаемся к замене

$$y' = x(e^x + C_1)$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем искомое решение исходного уравнения

$$y = \int x(e^x + C_1)dx = \begin{vmatrix} x = u & dx = du \\ (e^x + C_1)dx = dv & v = e^x + C_1 x \end{vmatrix} = x(e^x + C_1 x) - \int (e^x + C_1 x)dx =$$

$$= x(e^x + C_1 x) - e^x - C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 =$$

$$= e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

4. $y'' + 7y' - 8y = 3e^{-8x}$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами.
Решение будем искать в виде суммы общего решение соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y = \bar{y} + \tilde{y}$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$k^2 + 7k - 8 = 0 \Rightarrow (k-1)(k+8) = 0 \Rightarrow k_1 = 1, \quad k_2 = -8$$

Корни действительные, разные, тогда общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-8x}$$

Находим частное решение неоднородного уравнения
Так как правая часть уравнения имеет специальный вид, то допустимо частное решение неоднородного уравнения искать в виде правой части.

$$\tilde{y} = Axe^{-8x}$$

Найдем производные, подставим в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, определим их

$$\tilde{y} = Axe^{-8x}$$
$$\tilde{y}' = Ae^{-8x} - 8Axe^{-8x}$$
$$\tilde{y}'' = -16Ae^{-8x} + 64Axe^{-8x}$$
$$-16Ae^{-8x} + 64Axe^{-8x} + 7Ae^{-8x} - 56Axe^{-8x} - 8Axe^{-8x} = 3e^{-8x}$$
$$-9A = 3 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$$

Т.о., частное решение неоднородного уравнения

$$\tilde{y} = -\frac{x}{3}e^{-8x}$$

Следовательно, искомое решение

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-8x} - \frac{x}{3}e^{-8x} = C_1 e^x + \left(C_2 - \frac{x}{3}\right)e^{-8x}$$

5. $y'' - 3y' + 2y = \sin 3x$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами.
Решение будем искать в виде суммы общего решение соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y = \bar{y} + \tilde{y}$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow (k-1)(k-2) = 0 \Rightarrow k_1 = 1, \quad k_2 = 2$$

Корни действительные, разные, тогда общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Находим частное решение неоднородного уравнения
Так как правая часть уравнения имеет специальный вид, то допустимо частное решение неоднородного уравнения искать в виде правой части.

$$\tilde{y} = A\sin 3x + B\cos 3x$$

Найдем производные, подставим в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, определим их

$$\begin{aligned}
&\tilde{y} = A\sin 3x + B\cos 3x \\
&\tilde{y}' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x \\
&\tilde{y}'' = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x \\
&-9A\sin 3x - 9B\cos 3x - 3(3A\cos 3x - 3B\sin 3x) + 2(A\sin 3x + B\cos 3x) = \sin 3x
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} -7A + 9B = 1 \\ -7B - 9A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7A + 9B = 1 \\ 81B + 49B = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7A + 9B = 1 \\ 130B = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{7}{130} \\ B = \dfrac{9}{130} \end{cases}$$

Т.о., частное решение неоднородного уравнения

$$\tilde{y} = -\frac{7}{130}\sin 3x + \frac{9}{130}\cos 3x$$

Следовательно, искомое решение

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \frac{7}{130}\sin 3x + \frac{9}{130}\cos 3x$$

6. $2z'^2 + z''(z-1) = 0, \qquad z(0) = 2, \;\; z'(0) = 1$

Уравнение не содержит переменную х в явном виде. По этому делаем замену

$$z' = p \Rightarrow z'' = pp'$$

$$2p^2 + pp'(z-1) = 0 \Rightarrow p(2p + p'(z-1)) = 0$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} p = 0 \\ 2p + p'(z-1) = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения

$$\frac{p'}{p} = \frac{2}{1-z} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{2}{1-z} dz \Rightarrow \ln p = \ln C_1 - 2\ln(1-z) \Rightarrow p = \frac{e^C}{(z-1)^2}$$

Т.о., получим общие интегралы исходного уравнения

$$\begin{cases} p = 0 \\ p = \dfrac{C_1}{(z-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z' = 0 \\ z' = \dfrac{C_1}{(z-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = C_0 \\ \int (z-1)^2 dz = \int C_1 dx \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = C \\ \dfrac{z^3}{3} - z^2 + z = xC_1 + C_2 \end{cases}$$

Из начальных условий определяем

$$z(0) = 2 \Rightarrow \frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 = 0 \cdot C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}$$

$$z'(0) = \frac{C_1}{(1-0)^2} = 1 \Rightarrow C_1 = 1$$

Следовательно, искомое частное решение уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} z = C \\ \dfrac{z^3}{3} - z^2 + z = x + \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

7. $y'' + 4y' = 3x^2 + 1$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами.
Решение будем искать в виде суммы общего решение соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y = \bar{y} + \tilde{y}$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$k^2+4k=0 \Rightarrow k(k+4)=0 \Rightarrow k_1=0, \quad k_2=-4$$

Корни действительные, разные, тогда общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$\bar{y}=C_1+C_2e^{-4x}$$

Находим частное решение неоднородного уравнения
Так как правая часть уравнения имеет специальный вид, то допустимо частное решение неоднородного уравнения искать в виде правой части.

$$\tilde{y}=x(Ax^2+Bx+C)$$

Найдем производные, подставим в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, определим их

$$\begin{aligned}
&\tilde{y}=x(Ax^2+Bx+C)\\
&\tilde{y}'=(Ax^2+Bx+C)+x(2Ax+B)\\
&\tilde{y}''=(2Ax+B)+(2Ax+B)+2Ax=2(2Ax+B)+2Ax\\
&2(2Ax+B)+2Ax+4(Ax^2+Bx+C)+4x(2Ax+B)=3x^2+1
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}12A=3\\ 6A+8B=0\\ 2B+4C=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\dfrac{1}{4}\\ B=-\dfrac{3}{16}\\ C=\dfrac{11}{32}\end{cases}$$

Т.о., частное решение неоднородного уравнения

$$\tilde{y}=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{16}x^2+\frac{11}{32}x$$

Следовательно, искомое решение

$$y=\bar{y}+\tilde{y}=C_1+C_2e^{-4x}+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{16}x^2+\frac{11}{32}x$$

8. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами.
Решение будем искать в виде суммы общего решение соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y=\bar{y}+\tilde{y}$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$k^2+1=0 \Rightarrow k^2=-1 \Rightarrow k_1=i, \quad k_2=-i$$

Корни комплексные, тогда общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$$

Находим частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной в виде

$$\tilde{y}=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$$

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos x\cos x+C_2'(x)\sin x\cos x=0 \\ -C_1'(x)\sin x\sin x+C_2'(x)\cos x\sin x=\dfrac{\sin x}{\sin x} \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$C_1'(x)(\cos^2 x+\sin^2 x)=-1 \Rightarrow C_1=-\int 1dx \Rightarrow C_1=-x$$

Из второго уравнения системы

$$-C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\frac{1}{\sin x} \Rightarrow C_2'(x)\cos x=\frac{1}{\sin x}+C_1'(x)\sin x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_2'(x)=\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow C_2'(x)=\frac{1-\sin^2 x}{\sin x\cos x} \Rightarrow C_2'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$$

Отсюда

$$C_2(x)=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{1}{\sin x}d\sin x=\ln\sin x$$

Т.о., получаем частное решение неоднородного уравнения

$$\tilde{y}=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x=-x\cos x+\sin x\ln\sin x$$

В итоге искомое решение исходного уравнения

$$y=\bar{y}+\tilde{y}=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln\sin x$$

Или

$$y=(C_1-x)\cos x+(C_2+\ln\sin x)\sin x$$